

FIZICA MEDIULUI: O Incursiune Spațio-Temporală în Misterele Universului

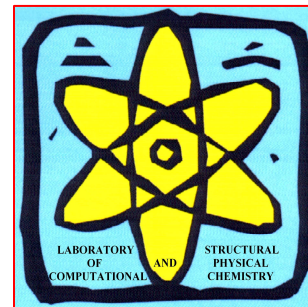
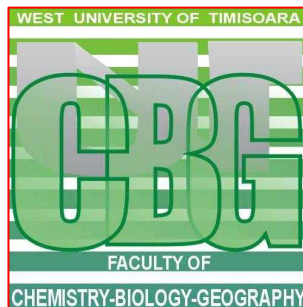
PROBLEMA CELOR DOUĂ CORPURI. LEGILE LUI KEPLER

Conf. Dr. Mihai V. PUTZ

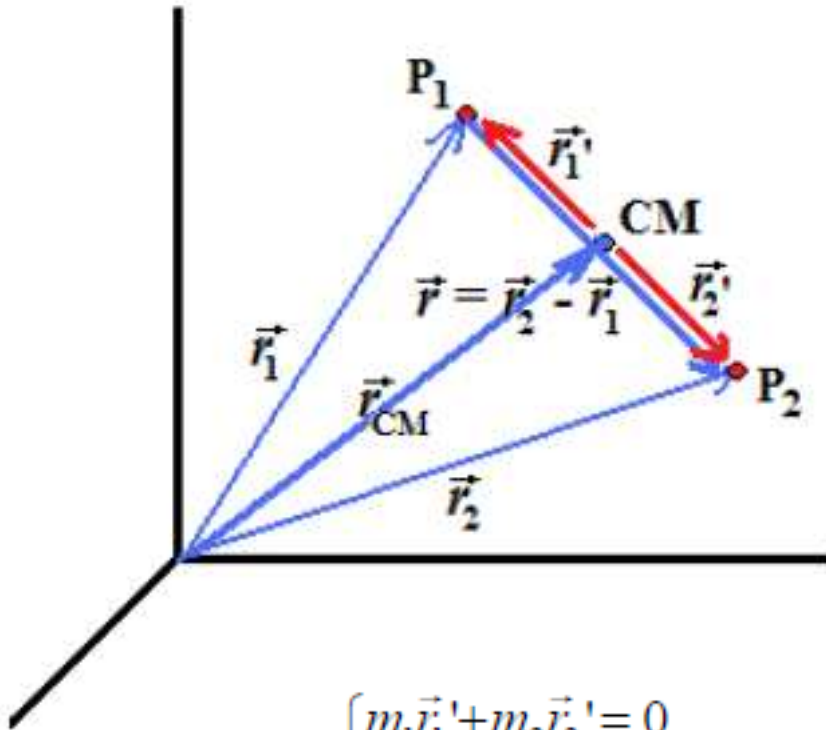
*Chemistry Department, West University of Timisoara,
Pestalozzi Street No.16, Timisoara, RO-300115, Romania;
E-mails: mvputz@cbg.uvt.ro or mv_putz@yahoo.com ;
Web: <http://www.mvputz.iqstorm.ro>*

*Member of American Chemical Society
Member of European Society of Mathematical Chemistry*

*Editor in-Chief of Int. J. Chem. Model. (at NOVA Publishers)
Editor in-Chief of Int. J. Environ. Sci. (at SERIALS Publishers)
Guest Editor & Editor of Int. J. Mol. Sci. (at MDPI Organization)*



Fie două corpuri de mase m_1 și m_2 ; să se studieze mișcarea acestora în ipoteza că interacționează reciproc.



$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \end{cases}$$

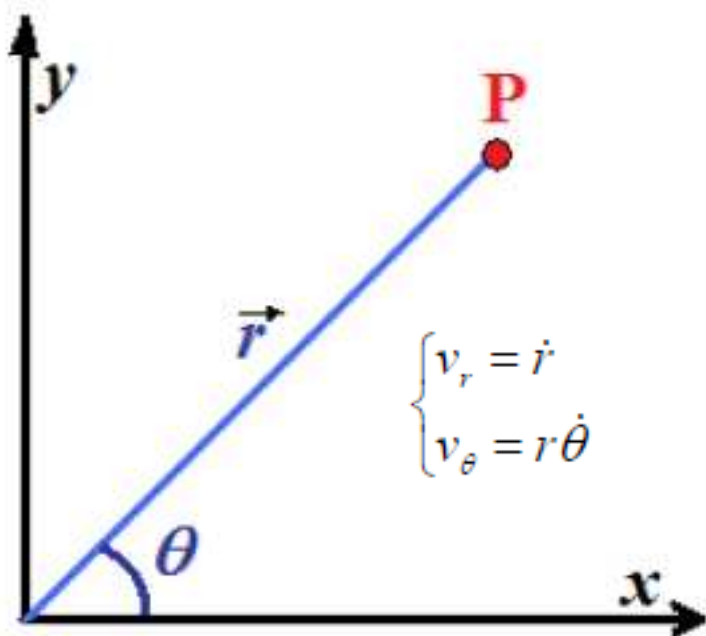
$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$L = T(\dot{\vec{r}}_{CM}, \dot{\vec{r}}) - V(|\vec{r}|)$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_{CM}^2}_{\text{fata de sistemul FLX}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2}_{\text{fata de sistemul CM}}$$

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$L(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

$$L(\dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = |\vec{L}^\theta| = L^\theta = 2m |\vec{\Omega}| = ct.$$

$$\vec{L}^\theta = \vec{r} \times m \vec{v}_\theta$$

cea ce prilejuiește formularea așa numitei *Legi a II a a lui Kepler* în mișcarea în câmp central: *vectorul de poziție al punctului material ce se mișcă în câmp central descrie arii egale în timpuri egale*; în termeni de mecanică analitică înseamnă că momentul cinetic orbital (sau momentul de arie) se conservă în mișcarea de tip central.

Mai mult, Lagrangeanul polar mai are o coordonată ciclică: timpul! În acest caz se pune problema: ce integrală primă (lege de conservare) corespunde independenței Lagrangeanului de timp? Răspunsul îl aflăm combinând viteza unghiulară din momentul cinetic orbital de mai sus

$$\dot{\theta} = \frac{L^\theta}{mr^2}$$

cu ecuația Lagrange radială

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0$$

ecuația Lagrange-Binet

$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - \frac{L^{\theta 2}}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

Prin multiplicarea ultimei relații cu $\dot{r} = dr/dt$, aceasta se poate rearanja sub forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^{\theta 2}}{2mr^2} + V(r) \right) = 0$$

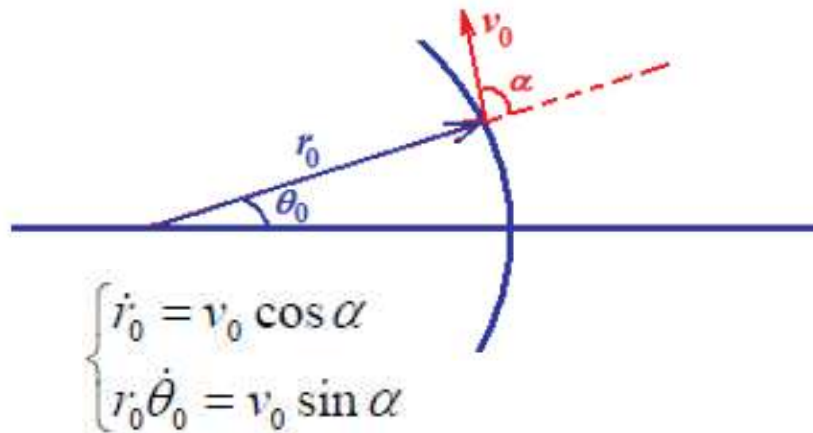
ceea ce nu reprezintă alceva decât conservarea energiei totale a mișcării în câmp central

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m\dot{r}^2}_{\text{energie cinetica}} + \underbrace{\frac{L^{\theta 2}}{2mr^2}}_{\text{energie cinetica orbitala}} + \underbrace{V(r)}_{\text{energie potentiala}} = ct.$$

$$V(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

$$k = -\frac{Ze_0^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$k = GmM$$



$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\kappa m}{L^{\theta^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \underbrace{C_1 \cos(\theta - \theta_1)}_{\text{soluție a ecuației omogene}} + \underbrace{\frac{\kappa m}{L^{\theta^2}}}_{\text{soluție particulară}}$$

$$C_1 = \frac{e}{p}, \quad p = \frac{L^{\theta^2}}{\kappa m}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}, \quad e \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{hiperbola} \\ = 1 \rightarrow \text{parabola} \\ \in (0,1) \rightarrow \text{elipsa} \\ 0 \rightarrow \text{cerc} \end{cases}$$

Acest rezultat este foarte relevant și prilejuiește formularea *Legii I a lui Kepler*: mișcarea în câmp central se face în acord cu ecuația conicelor în coordonate polare, originea aflându-se într-unul din focare.

$$r = r(\theta)$$

Astfel, se reconsideră ecuația Lagrange radială sub forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \quad F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L^\theta}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L^\theta}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \left(\frac{L^\theta}{mr^2} \right) \left(-\frac{L^\theta}{m} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{L^{\theta 2}}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

cu ajutorul cărora ecuația radială (cu forța) de mai sus devine

$$-\frac{L^{\theta 2}}{mr^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{L^{\theta 2}}{mr^3} = F(r)$$

ecuației lui Binet

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{F(r)}{L^{\theta 2}} mr^2$$

Pentru o discuție excentricitatea conicei- energia totală a sistemului

$$e \cos(\theta_0 - \theta_1) = \frac{p}{r_0} - 1$$

$$e \sin(\theta_0 - \theta_1) = \frac{p \cos \alpha}{r_0 \sin \alpha}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - \theta_1)] \right) \right|_0$$

$$e^2 = 1 + 2 \frac{p}{r_0} \left(\frac{p}{2r_0 \sin^2 \alpha} - 1 \right)$$

$$e^2 = 1 + 2 \frac{EL^{\theta 2}}{mk^2}$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{k}{r_0}$$

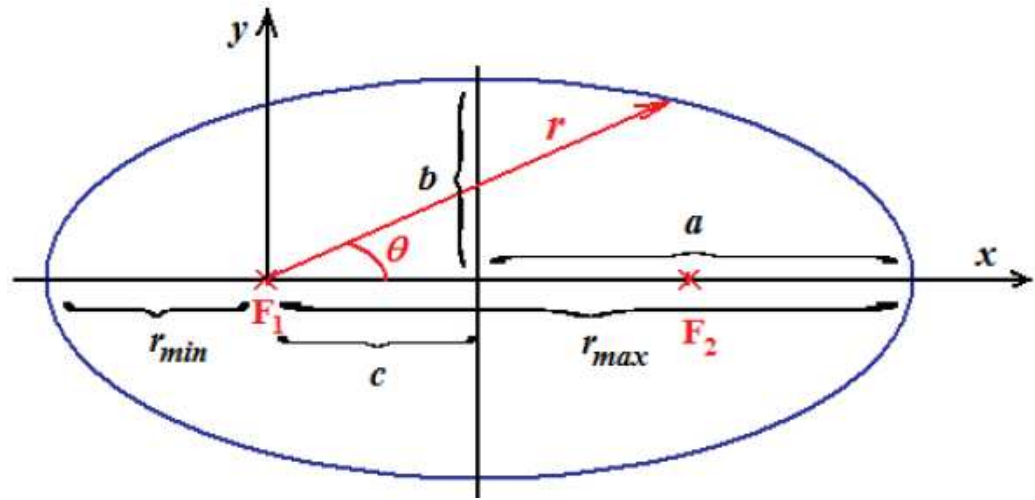
Excentricitatea/felul conicei	Energia totală	Condiția orbitală
$e > 1$ /hiperbolă	$E > 0$	$r_0 v_0^2 > \frac{2k}{m}$
$e = 1$ /parabolă	$E = 0$	$r_0 v_0^2 = \frac{2k}{m}$
$0 < e < 1$ /elipsă	$-\frac{mk^2}{2L^{\theta 2}} < E < 0$	$\frac{k}{m} < r_0 v_0^2 < \frac{2k}{m}$
$e = 0$ /cerc	$E = -\frac{mk^2}{2L^{\theta 2}}$	$r_0 v_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1-e^2} \\ b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}$$

$$-E \rightarrow |E|$$

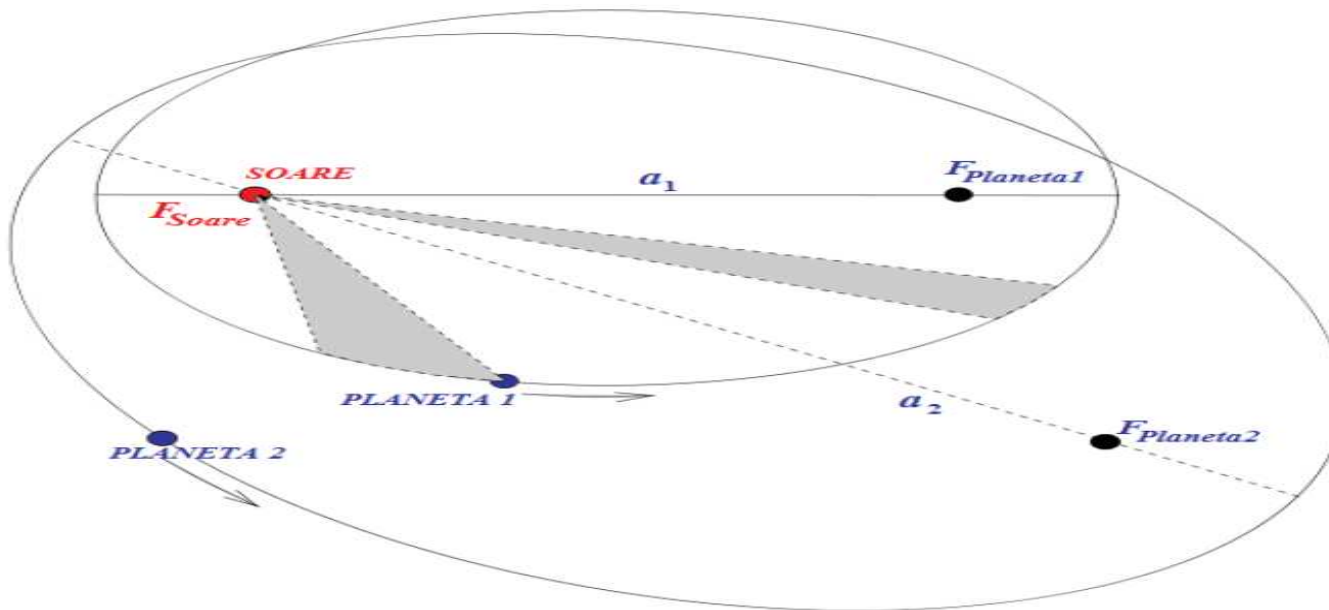
$$\begin{cases} a = \frac{k}{2|E|} \\ b = \frac{L^\theta}{\sqrt{2m|E|}} \end{cases}$$

$$\frac{\pi ab}{t} = \Omega^0 = \frac{L^\theta}{2m} \quad \frac{t^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad \frac{t^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{GM}$$



raportul

dintre pătratul timpului de revoluție și cubul axei mari pentru mișcarea oricărei planete din sistemul solar este o constantă (la fel pentru toate planele unui sistem solar) – ceea ce reprezintă Legea a III a a lui Kepler.



Johannes Kepler

(27 Decembrie 1571 Weil der Stadt, lângă Stuttgart - 15 Noiembrie 1630 (la 58 ani) Regensburg -Bavaria, Germania; a avut contribuții în astronomie, astrologie, matematică și filosofie naturală; a fost asociat la Universitatea din Linz; cu Alma Mater la Universitatea din Tübingen; este faimos pentru legile Kepler ale mișcărilor planetelor și conjectura Kepler a împachetării optime a corpurilor identic sferice.

Johannes Kepler



Nicolaus Copernicus

16 Februarie 1473 Thorn - Prusia Regală, Regatul Poloniei - 24 Mai 1543 (la 70 ani) Frauenburg, Prince-Bishopric de Warmia, Regatul Poloniei; a avut contribuții în matematică, astronomie, legea canonică catolică, medicină, economie; a fost asociat la Universitatea din Kracovia, Universitatea din Bologna, Universitatea din Padova, Universitatea din Ferrara; este faimos pentru ipoteza heliocentrismului.

Nicolaus Copernicus

Fizica Mediului: Legile lui Kepler