FIZICA MEDIULUI:
O Incursiune Spațio-Temporală în Misterele Universului

PROBLEMA CELOR DOUĂ CORPURI. LEGILE LUI KEPLER

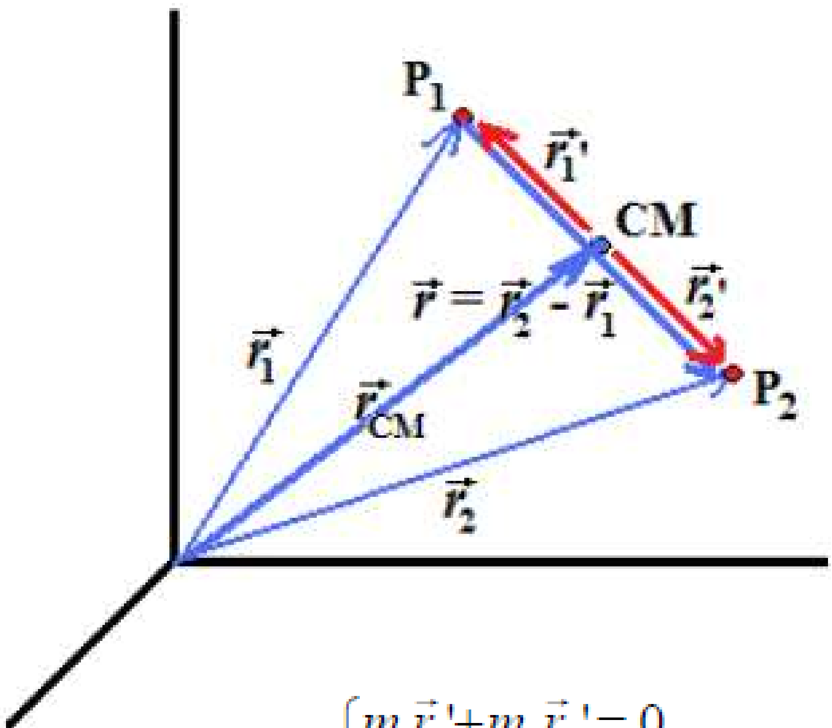
Conf. Dr. Mihai V. PUTZ

Chemistry Department, West University of Timisoara,
Pestalozzi Street No.16, Timisoara, RO-300115, Romania;
E-mails: mvputz@cbg.uvt.ro or mv_putz@yahoo.com ;
Web: http://www.mvputz.iqstorm.ro

Member of American Chemical Society
Member of European Society of Mathematical Chemistry

Editor in-Chief of Int. J. Chem. Model. (at NOVA Publishers)
Editor in-Chief of Int. J. Environ. Sci. (at SERIALS Publishers)
Guest Editor & Editor of Int. J. Mol. Sci. (at MDPI Organization)

Fie două corpuri de mase m_1 și m_2; să se studieze mișcarea acestora în ipoteza că interacționează reciproc.



$$L = T\left(\dot{\vec{r}}_{CM}, \dot{\vec{r}}\right) - V\left(\left|\vec{r}\right|\right)$$

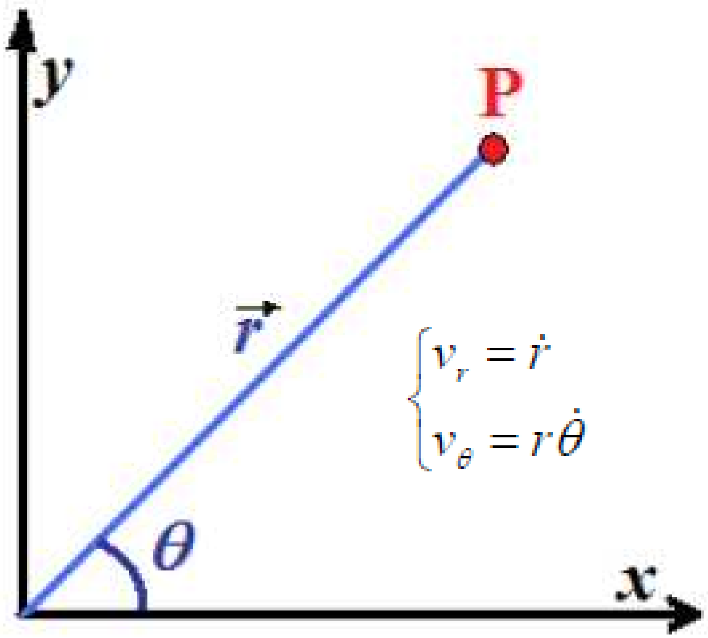
$$T = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{r}}_{CM}^{\,2}}_{\text{fata de sistemul FIX}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}}_{\text{fata de sistemul CM}}$$

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}\,, \quad \vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\begin{cases} m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{r}}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V\left(\left|\vec{r}\right|\right)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,, \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$L(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2 - V\left(\left|\vec{r}\right|\right)$$

$$L\left(\dot{r}, \dot{\theta}\right) = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \left|\vec{L}^\theta\right| = L^\theta = 2m\left|\vec{\Omega}\right| = ct.$$

$$\vec{L}^\theta = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

ceea ce prilejuiește formularea așa numitei *Legi a II a a lui Kepler* în mișcarea în câmp central: *vectorul de poziție al punctului material ce se mișcă în câmp central descrie arii egale în timpi egali*; în termeni de mecanică analitică înseamnă că momentul cinetic orbital (sau momentul de arie) se conservă în mișcarea de tip central.

Mai mult, Lagrangeanul polar mai are o coordonată ciclică: timpul! În acest caz se pune problema: ce integrală primă (lege de conservare) corespunde independenței Lagranjeanului de timp? Răspunsul îl aflăm combinând viteza unghiulară din momentul cinetic orbital de mai sus

$$\dot{\theta} = \frac{L^{\theta}}{mr^2}$$

cu *ecuația Lagrange radială*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0$$

ecuația Lagrange-Binet

$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - \frac{L^{\theta 2}}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

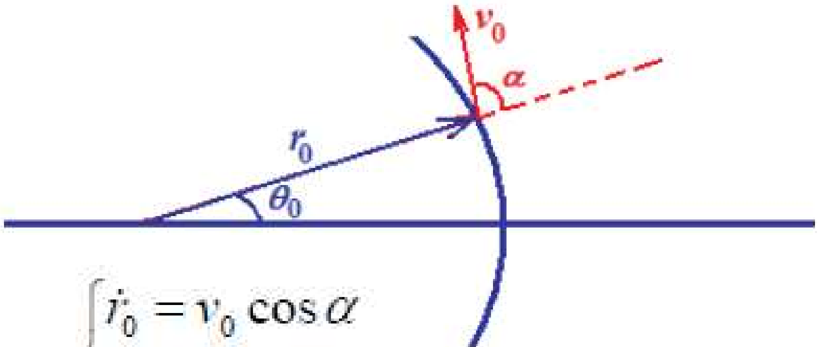
Prin multiplicarea ultimei relații cu $\dot{r} = dr / dt$, aceasta se poate rearanja sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^{\theta 2}}{2mr^2} + V(r)\right) = 0$$

ceea ce nu reprezintă alceva decât conservarea energiei totale a mișcării în câmp central

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\substack{energie\\ cinetica}} + \underbrace{\frac{L^{\theta 2}}{2mr^2}}_{\substack{energie\\ cinetica\\ orbitala}} + \underbrace{V(r)}_{\substack{energie\\ potentiala}} = ct.$$

$$V(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow F(r) = -\frac{k}{r^2} \qquad k = -\frac{Ze_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \qquad k = GmM$$



$$\begin{cases} \dot{r}_0 = v_0 \cos\alpha \\ r_0\dot{\theta}_0 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{km}{L^{\theta 2}}$$

$$\frac{1}{r} = \underbrace{C_1 \cos(\theta - \theta_1)}_{\text{solutie a ecuatiei omogene}} + \underbrace{\frac{km}{L^{\theta 2}}}_{\text{solutie particulara}}$$

$$C_1 = \frac{e}{p}, \; p = \frac{L^{\theta 2}}{km}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)}, \; e\begin{cases} > 1 \to hiperbola \\ = 1 \to parabola \\ \in (0,1) \to elipsa \\ 0 \to cerc \end{cases}$$

Acest rezultat este foarte relevant și prilejuiește formularea *Legii I a lui Kepler: mișcarea în câmp central se face în acord cu ecuația conicelor în coordonate polare, originea aflându-se într-unul din focare.*

$r = r(\theta)$

Astfel, se reconsideră ecuația Lagrange radială sub forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \qquad F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L^{\theta}}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L^{\theta}}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}\right) = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \left(\frac{L^{\theta}}{mr^2}\right)\left(-\frac{L^{\theta}}{m}\right)\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{L^{\theta 2}}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

cu ajutorul cărora ecuația radială (cu forța) de mai sus devine

$$-\frac{L^{\theta 2}}{mr^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^{\theta 2}}{mr^3} = F(r)$$

ecuației lui Binet

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{F(r)}{L^{\theta 2}}mr^2$$

Pentru o discuție excentricitatea conicei- energia totală a sistemului

$$e\cos(\theta_0-\theta_1)=\frac{p}{r_0}-1$$

$$e\sin(\theta_0-\theta_1)=\frac{p}{r_0}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left[1+e\cos(\theta-\theta_1)\right]\right)\right|_0$$

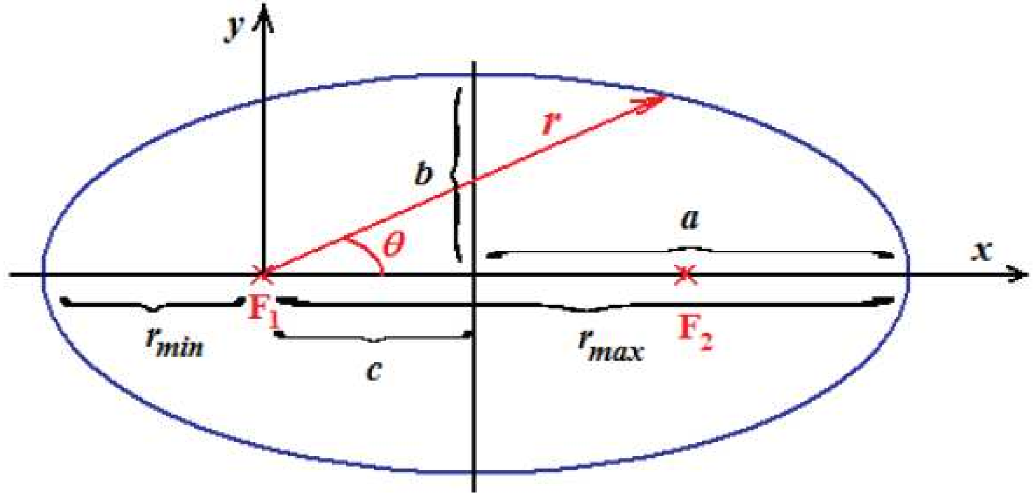
$$e^2=1+2\frac{p}{r_0}\left(\frac{p}{2r_0\sin^2\alpha}-1\right)$$

$$e^2=1+2\frac{EL^{\theta 2}}{mk^2}$$

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{k}{r_0}$$

Excentricitatea/felul conicei	Energia totală	Condiția orbitală
$e>1$ /hiperbolă	$E>0$	$r_0v_0^2>\frac{2k}{m}$
$e=1$ /parabolă	$E=0$	$r_0v_0^2=\frac{2k}{m}$
$0<e<1$ /elipsă	$-\frac{mk^2}{2L^{\theta 2}}<E<0$	$\frac{k}{m}<r_0v_0^2<\frac{2k}{m}$
$e=0$ /cerc	$E=-\frac{mk^2}{2L^{\theta 2}}$	$r_0v_0^2=\frac{k}{m}$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left(r_{\min} + r_{\max}\right) = \frac{p}{1-e^2} \\ b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}$$



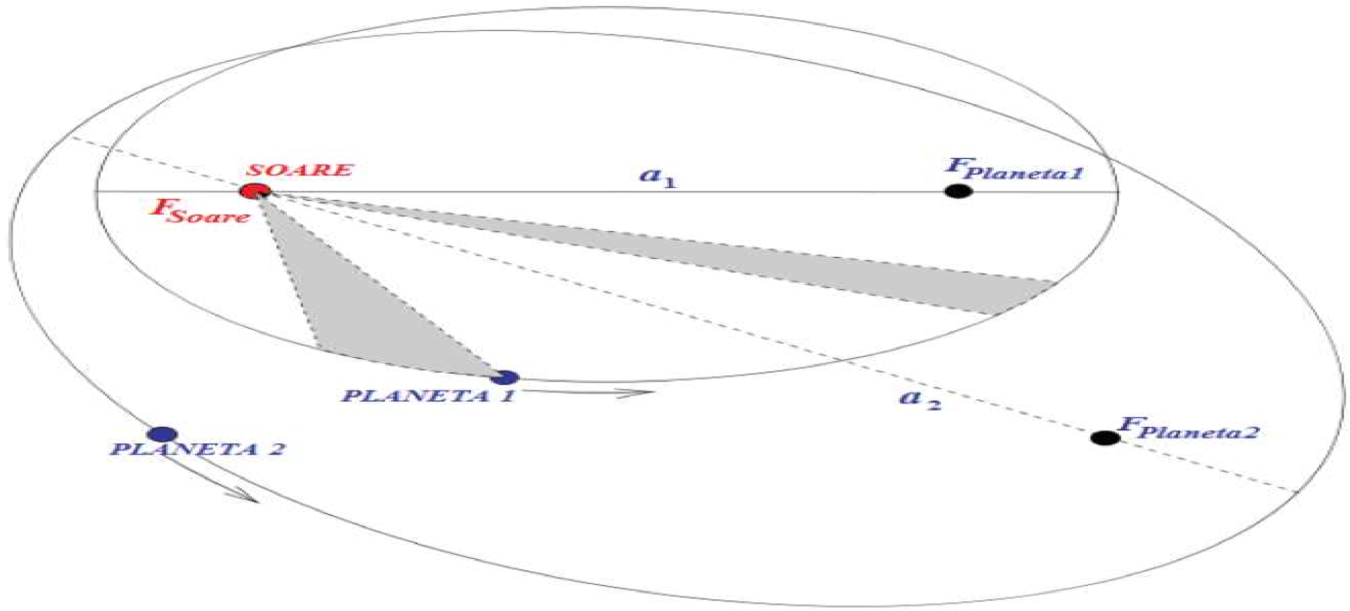
$$-E \rightarrow |E|$$

$$\begin{cases} a = \frac{k}{2|E|} \\ b = \frac{L^\theta}{\sqrt{2m|E|}} \end{cases}$$

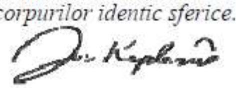
$$\frac{\pi ab}{t} = \Omega^0 = \frac{L^\theta}{2m} \qquad \frac{t^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{k} \qquad \frac{t^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{GM}$$

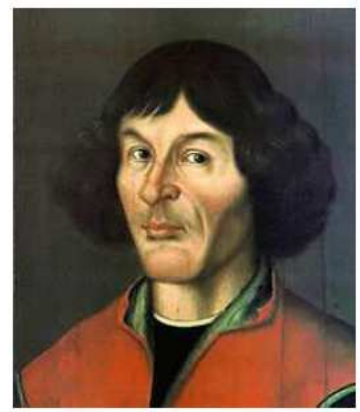
raportul

dintre pătratul timpului de revoluție și cubul axei mari pentru mișcarea oricărei planete din sistemul solar este o contantă (la fel pentru toate planele unui sistem solar) – ceea ce reprezintă Legea a III a a lui Kepler



Johannes Kepler
(27 Decembrie 1571 Weil der Stadt, lângă Stuttgart - 15 Noiembrie 1630 (la 58 ani) Regensburg –Bavaria, Germania; a avut contribuții în astronomie, astrologie, matematică și filosofiie naturală; a fost asociat la Universitatea din Linz; cu Alma Mater la Universitatea din Tübingen; este faimos pentru legile Kepler ale mițcărilro planetelor și conjectura Kepler a împachetării optime a corpurilor identic sferice.





Nicolaus Copernicus
16 Februarie 1473 Thorn – Prusia Regală, Regatul Poloniei - 24 Mai 1543 (la 70 ani) Frauenburg, Prince-Bishopric de Warmia, Regatul Poloniei; a avut contribuții în matematică, astronomie, legea canonică catolică, medicină, economie; a fost asociat la Universitatea din Kracovia, Universitatea din Bolonia, Universitatea din Padova, Universitatea din Ferrara; este faimos pentru ipoteza heliocentrismului.